

# Définitions

## les mathématiques

C'est la science qui étudie les grandeurs, nombres, figures, espaces, ainsi que les relations entre ces objets.

L'arithmétique, l'algèbre, la géométrie sont des branches des mathématiques.

## Les chiffres

Caractères utilisés pour représenter un nombre.

Ceux qu'on utilise couramment, en base 10, sont les chiffres arabes :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Cette liste présente les chiffres dans l'ordre chronologique des quantités représentées, de la plus petite à la plus grande. Chaque chiffre représente l'addition du chiffre précédent et de l'unité.

Quantités représentées par ces signes et leur nom :

0 : aucune quantités

1 : un → 

2 : deux → 

3 : trois → 

4 : quatre → 

5 : cinq → 

6 : six → 

7 : sept → 

8 : huit → 

9 : neuf → 

## Les chiffres romains

Les chiffres romains sont figurés par des lettres capitales ayant une valeur numérique :

$$I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500 \text{ et } M = 1000$$

Les calculs étaient très difficiles, bien qu'ils aient réalisés de grandes constructions.

Ils utilisaient des abaques :

C	X	M	C	X	I
● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ●
● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ●
● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ●
● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ● ●	● ● ●

⇒ 1 : **Le principe de l'abaque romain.**

*On place les jetons en commençant par les unités, à droite.*

●	●		●	●	●
C	X	M	C	X	I
● ●	● ●	● ● ● ●	● ●	● ●	
● ●	● ●	● ● ● ●	●		
● ●	● ●	● ● ● ●			

⇒ 2 : **le principe de l'abaque romain simplifié.**

*Chaque colonne est subdivisée en deux parties.*

*Un jeton du bas correspond à une unité dans l'ordre correspondant, un jeton du haut correspond à cinq unités dans cet ordre.*

Voir : <https://editioneslibertes.fr/2023/02/13/larithmetique-romaine/>

<https://www.icem-pedagogie-freinet.org/node/8013>

## Les nombres

Notion permettant d'indiquer la quantité d'éléments qui forment un ensemble d'êtres ou de choses, d'établir le rapport d'une quantité à une autre quantité de même nature, appelée unité ou une collection d'unités ; également, le symbole par lequel on représente cette notion.

Il existe :

- les nombres cardinaux (un nombre cardinal), : 128, 2659
- et les nombres ordinaux (un nombre ordinal) qui marque l'ordre, tel que « premier », « deuxième », « troisième », etc.

Le nombre est un élément d'un ensemble défini par des propriétés opératoires, servant à compter, comparer, mesurer, calculer.

## Bases de numération(arithmétique)

En arithmétique, une base est un nombre  $b$  non nul dont les puissances successives interviennent dans l'écriture de nombres dans la numération positionnelle utilisant ces puissances. Ce système de numération est alors désigné comme « de base  $b$  », les puissances de  $b$  définissant l'ordre de grandeur, aussi appelé le « poids », de chacune des positions occupées par les chiffres composant le nombre représenté. Les bases les plus utilisées sont celles où  $b$  est un entier naturel. Il existe également des systèmes utilisant des bases non entières.

On utilise généralement, pour les bases entières à partir de deux, un nombre de chiffres égal à la base.

En base  $b$ , un nombre  $n$  s'écrit usuellement  $n_b$ , l'indice étant facultatif pour la base dix.

### Bases courantes

Certaines bases sont couramment employées :

- la base 2 (système binaire), en électronique numérique et informatique :

01110011

- la base 8 (système octal), en informatique, abandonnée au profit de la base 16 :

01234567

- la base 10 (système décimal), la plus commune, aujourd'hui la référence dans le domaine des sciences,

- la base 12 (système duodécimal), de manière embryonnaire, pour le compte en mois et années :

1 année = 12 mois

- la base 16 (système hexadécimal), en informatique, facilitant les conversions en base 2 en regroupant des chiffres binaires, 16 étant une puissance de 2 :

0123456789ABCDEF

- la base 60 (système sexagésimal), dans la mesure du temps et des angles :

$20^\circ, 90^\circ, 120^\circ$

## Notation positionnelle des nombres

La manière dont nous notons les nombres est née en Inde selon les historiens et aurait été introduite en Occident par le moine français Gerbert d'Aurillac, à la fin du Xème siècle.

La notation positionnelle est un procédé d'écriture des nombres, dans lequel chaque position d'un chiffre ou symbole est reliée à la position voisine par un multiplicateur, appelé base du système de numération. Chaque position peut être renseignée par un symbole (notation sans base auxiliaire) ou par un nombre fini de symboles (notation avec base auxiliaire). La valeur d'une position est celle du symbole de position ou celle de la précédente position apparente multipliée par la base. Le nombre de symboles nécessaires est au moins égal à la base, ou à la plus grande base auxiliaire utilisée.

Le système décimal usuel utilise dix symboles, plus les symboles pour les nombres signés et les nombres à virgule, tandis que le système sexagésimal babylonien se sert d'un système décimal auxiliaire pour chaque position.

### SYLVESTRE II, GERBERT D'AURILLAC (938-1003) pape (999-1003)

Né en Auvergne, Gerbert fait ses études au monastère de Saint-Géraud d'Aurillac. Il est présenté au pape Jean XIII pour sa science exceptionnelle, puis à l'empereur Otton Ier ; Adalbéron, évêque de Reims, le fait écolâtre de son studium épiscopal : Gerbert y enseigne et y fait enseigner toutes les connaissances possibles, profanes et religieuses, antiques et modernes ; lui-même acquiert une grande réputation de mathématicien et d'astronome. Il conseille Adalbéron quand ce dernier, au concile de Senlis (987), fait élire comme roi, puis sacre Hugues Capet, au détriment des derniers descendants de Charlemagne. Il succède à son protecteur sur le trône archiépiscopal de Reims, ce qui lui vaut des démêlés infinis avec les évêques fidèles à l'Empire, et avec la papauté, dont il conteste l'autorité ; il joue un rôle dominant dans une série de conciles de France, où il se fait le champion de l'indépendance des Églises nationales, notamment pour la nomination des évêques. Il est suspendu et excommunié par le pape pour avoir refusé de quitter le siège de Reims ; Otton III le fait évêque de Ravenne, puis, à la mort de son autre protégé Grégoire V, le fait élire pape en 999.

Gerbert, qui prend le nom de Sylvestre, pratique alors la méthode autoritaire qu'il avait combattue dans les nominations et destitutions d'évêques ; il lutte vigoureusement contre la simonie et cherche à relever de son délabrement le Saint-Siège, jouet des factions aristocratiques de Rome et de la politique européenne. On lui attribue l'introduction du système féodal français dans l'État pontifical, qui l'ignorait : en fait, il reprend la tradition juridique traditionnelle des concessions territoriales en échange d'une censive dérisoire, mais introduit la clause militaire : le puissant laïc bénéficiaire doit au pape un service en armes et en hommes ; surtout, il essaie d'introduire dans l'État pontifical des personnages puissants qui soient étrangers aux grandes familles romaines, en particulier à celle d'Albéric et de Théophylacte, habituée à faire et défaire les papes. La diplomatie de Sylvestre II consiste à unir aussi étroitement que possible la Germanie ottonienne à Rome ; il retient Otton près de lui et rêve d'un Empire latino-germanique capable de contrebalancer Byzance. Il détache de la Germanie les Églises de Pologne (sous Boleslas) et de Hongrie (sous Étienne) en les dotant d'une hiérarchie épiscopale nationale. L'opposition romaine l'oblige à quitter Rome en 1001, et la mort d'Otton, son allié de toujours (23 janv. 1002), condamne ses rêves de réforme. Il meurt à Rome sans avoir mené à bien son œuvre.

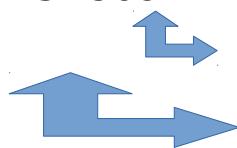


Pape de l'an mille, Sylvestre II a dû sans doute à sa réputation d'astronome de figurer dans un certain nombre de récits légendaires postérieurs à cette époque. Ainsi trouve-t-on dans le Miroir historial (*Speculum historiae*, mil. xiiiie s.) de Vincent de Beauvais la légende selon laquelle Gerbert aurait tout jeune vendu son âme au diable, qui, en échange, lui aurait assuré sa carrière politique jusqu'au siège de saint Pierre ; après quoi, le pape repenti aurait obtenu la miséricorde divine. On connaît assez bien la vie et l'action de Gerbert par les documents pontificaux et par son abondante correspondance.

— Jean-Pierre BORDIER

## Exemples en base 10 :

2754869



Le chiffre de droite représente l'unité.

Chaque nouveau chiffre à gauche de l'unité représente une nouvelle puissance de la base.

La lecture du nombre s'effectue de gauche à droite :

2 millions	2*	$10*10*10*10*10*10$
7 cent mille	7*	$10*10*10*10*10$
54 cinquante quatre mille	54*	$10*10*10*10$
8 cent	8*	$10*10*10$
6 soixante	6*	$10*10$
9 neuf	9*	$10^0$ (10 puissance zéro) = 1

Autre exemple :

Colonne de la quantité du groupe de la puissance supérieur	Colonne de la quantité du groupe de la puissance supérieure	Chiffre de la quantité des groupes d'unités	Chiffre de la quantité des unités
5	2	7	3
	1	2	8
		5	9

La notation 5273 signifie :

5 groupes de 1000 unités (appelés milliers)

+

2 groupes de 100 unités (appelés centaines)

+

7 groupes de 10 unités appelés dizaines)

+

3 unités

La notation 128 signifie :

1 groupe de 100 unités

+

2 groupes de 10 unités

+

8 unités

La notation 59 signifie :

5 dizaines

+

9 unités

### Les opérations sur les nombres

- Il existe quatre opérations de base sur les nombres, pour chacune d'entre elles, il y a une terminologie à connaître:

- l'addition :

les nombres que l'on additionne sont les termes et le résultat est la somme.

- la soustraction :

les nombres que l'on soustrait sont les termes et le résultat est la différence.

- la multiplication :

les nombres que l'on multiple sont les facteurs et le résultat est le produit.

- la division :

le nombre qui est divisé est le dividende, le nombre par lequel on divise est le diviseur et le résultat est le quotient. Si on n'effectue pas une division exacte, il y aura une partie du nombre de départ qui ne sera pas divisé, on l'appelle le reste de la division.

- La puissance :

La puissance d'un nombre est la multiplication du nombre par lui-même.

Par exemple :

- **le carré** d'un nombre est la multiplication d'un nombre par lui-même :

- $x*x$

Cette fonction s'écrit :  $x^2$ .

- **le cube** est la multiplication d'un nombre par lui-même deux fois :

- $x*x*x$

Cette fonction s'écrit :  $x^3$ .

- La racine :

En mathématiques élémentaires, la racine d'un nombre réel positif  $x$  est l'unique réel positif qui, lorsqu'il est multiplié par lui-même, donne  $x$ , c'est-à-dire le nombre positif dont la multiplication vaut  $x$ .

Dans cette expression,  $x$  est appelé le radicande et le signe  $\sqrt{-}$  est appelé le radical. La fonction qui, à tout réel positif, associe sa racine s'appelle la fonction racine.

La **racine carrée** d'un nombre réel positif  $x$  est l'unique réel positif qui, lorsqu'il est multiplié **une fois** par lui-même, donne  $x$ , c'est-à-dire le nombre positif dont le **carré** vaut  $x$  :

$$\sqrt{x} * \sqrt{x} = x$$

On le note  $\sqrt{x}$  ou  $x^{1/2}$ .

La **racine cubique** d'un nombre réel positif  $x$  est l'unique réel positif qui, lorsqu'il est multiplié **deux fois** par lui-même, donne  $x$ , c'est-à-dire le nombre positif dont le **cube** vaut  $x$ .

$$\sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x} * \sqrt[3]{x} = x$$

On le note  $\sqrt[3]{x}$  ou  $x^{1/3}$ .

Les autres racines sont appelées **racines n-ième** :

$\sqrt[n]{-}$  : racine quatrième.

- La fraction :

En mathématiques, une fraction est un moyen d'écrire un nombre rationnel sous la forme d'un quotient de deux entiers. Ainsi la fraction  $a/b$  désigne le quotient de  $a$  par  $b$  ( $b \neq 0$ ). Dans cette fraction,  $a$  est appelé le numérateur et  $b$  le dénominateur.

Exemple d'écriture de la fraction :  $56/8$  (avec un clavier) ou

$$\frac{56}{8}$$

Une fraction représente un partage d'une entité unique au numérateur et le dénominateur représente le nombre de parts faites dans cette entité.

En fait, c'est une division qui n'est pas calculée, afin de manipuler des chiffres entiers, ce qui permet des calculs sans approximation.